EXTENSIÓ PREDICTIVA D'UN SISTEMA LAGRANGIÀ SINGULAR

J.A. Llosa, F. Marquès i A. Molina
Departament de Física Teòrica
Universitat de Barcelona

I. Introducció

En intentar explicar, o si més no aproximar, la interacció entre quarks mitjançant una força que no sigui el potencial infinit [1] (hipòtesi simplificadora que fou emprada en els primers models), hom pren diferents models d'oscil·ladors [2]. Entre aquests hi ha els oscil·ladors relativistes que donen factors de forma correcta però no un conjunt satisfactori d'estats lligats [3]. El fet no desitjat que, en quantificar el model, apareguin oscil·lacions de tipus temps, és evitat fent ús del lligam $(P \cdot r) = 0$, el qual dóna lloc a un espectre d'energies positiu [4].

En aquest context se situa el lagrangià de Tabakayashy, Domenici, Gomis i Longui [5] (DGL), que descriu una interacció a distància covariant amb el lligam $(Pr) = 0$.

Prendre aquest lligam suposa privilegiar l'observador del sistema "centre de masses" i, per tant, obliga a renunciar al postulat d'equivalència entre observadors d'inèrcia a l'hora de descriure un sistema físic qualsevol.

Aquest postulat té per a nosaltres un significat físic important i clar. El motiu fonamental d'aquest treball és de demostrar que no hi ha cap necessitat d'abandonar-lo per a poder resoldre el model D.G.L. Segons el nostre parer, hem de quantificar l'extensió predictiva d'aquest model abans d'abandonar el criteri de democràcia per a tots els observadors d'inèrcia, puix que cal quelcom més que el bon funcionament d'un model específic per a abandonar un dels principis fonamentals de la relativitat.

A més, hi ha el precedent que, en fer predictiu el camp de Klein-Gordon, hom elimina les solucions d'energia negativa, i això mateix podria passar ací [6].

És en aquesta perspectiva que ataquem el problema, així com en la de mostrar la possibilitat de "predictivitzar" alguns sistemes lagrangians singulars.

A les seccions 2, 3 presentem respectivament els aspectes que ens interessen del S.L.S. de D.G.L. i dels S.P.I. per Poincaré, i també la definició d'extensió predictiva d'un S.L.S. A la secció 4 construïm l'extensió predictiva per al model de langrangià singular esmentat, utilitzant un mètode recurrent. A la secció 5 apliquem aquests resultats al cas de potencials tipus oscil·lador harmònic i tipus Kepler, i obtenim les equacions del moviment en ambdós casos.

II. El lagrangià singular D.G.L.

Els autors abans esmentats [5] parteixen del lagrangià singular:

$$L = \varepsilon^a \sqrt{-\mathcal{U}_A \dot{x}_A^2} \tag{2.1}$$

amb: $\mathcal{U}_A = m_A^2 - V(x^2)$

on **V** és una funció qualsevulla, derivable una vegada amb continuïtat, $\chi^\mu \equiv \eta^A \chi_A^\mu$, $\eta^A = \eta_A = (-1)^A$, $\epsilon^A = 1$ i el conveni de la suma val tant per als índexs $\mu, \nu, \rho \ldots = 0, 1, 2, 3$ com per als A, B, C, . . . = 1, 2, excepte quan indiquem expressament el contrari mitjançant uns parèntesis; a més $\chi_A^2 \equiv \chi_A^\mu \chi_A^\nu \eta_{\mu\nu}$ essent $\eta_{\mu\nu}$ la mètrica de Minkowsky (+2).

Les equacions d'Euler-Lagrange permeten de derivar de (2,1) la relació:

$$\underset{A}{P}{}^\mu{}_\nu \ddot{x}_A^\nu = \underset{A}{P}{}^\mu{}_\nu \, a_A^\nu (x_B, \dot{x}_C) \tag{2.2}$$

amb:

$$\underset{A}{P}{}^\mu{}_\nu \equiv \eta^\mu{}_\nu - \frac{\dot{x}_A^\mu \dot{x}_{A\nu}}{\dot{x}_A^2} \tag{2.3}$$

$$a_A^\nu = \eta_A V'(x^2) \cdot \frac{\sqrt{-\dot{x}_A^2}}{\sqrt{\mathcal{U}_A}} \cdot \varepsilon^B \frac{\sqrt{-\dot{x}_B^2}}{\sqrt{\mathcal{U}_B}} \chi^\nu \tag{2.4}$$

la qual ens dóna la component de l'acceleració χ_A^μ ortogonal a la velocitat $\dot{\chi}_A^\mu$. Aquesta relació únicament és vàlida sobre la subvarietat $\mathcal{V} \subset T^+(M_4)^2$, definida per:*

$$\mathcal{V} \equiv \left\{ (x_B^\mu, \dot{x}_c^\nu) \in T^+(M_4)^2 \;/\; P^\mu x_\mu = 0 \right\} \tag{2.5}$$

essent:

$$P^\mu \equiv \varepsilon^B \sqrt{U_B} \cdot \frac{\dot{x}_B^\mu}{\sqrt{-\dot{x}_B^2}} \tag{2.6}$$

el quadrimoment lineal que és una integral del moviment.

Recordem que, fora de $\mathcal{V}$, les equacions d'Euler-Lagrange que es deriven del lagrangià singular (2.1) són incompatibles [7].

La fita de la teoria de lagrangians singulars en aquest cas és derivar un sistema diferencial de segon ordre:

$$\frac{d}{d\lambda} = \varepsilon^A \dot{x}_A^\mu \frac{\partial}{\partial x_A^\mu} + \varepsilon^A \Xi_A^\mu (x_B, \dot{x}_c) \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{x}_A^\mu} \tag{2.7}$$

sobre $\tilde{\mathcal{V}}$ una subvarietat de $\mathcal{V}$ –la màxima posible–, de manera que: $\ddot{x}_A^\mu = \Xi_A^\mu(x_B, \dot{x}_c)$ satisfaci les condicions (2,2). Ací λ és una paràmetre escalar no necessàriament físic.

Això és resolt en el treball citat [5], i ens trobem que:

i) $\tilde{\mathcal{V}} \subset \mathcal{V}$ és definida pel nou lligam:

$$P^\mu \dot{x}_\mu = 0 \qquad , \qquad \dot{x}^\mu = \eta^\Delta \dot{x}_A^\mu \tag{2.8}$$

ii) les quadriacceleracions estan determinades excepte una funció contínua i arbitrària:

$$\Xi_A^\nu (x_B, \dot{x}_c, \lambda) = a_A^\nu (x_B, \dot{x}_c) + \ell(x_B, \dot{x}_c, \lambda) \cdot \dot{x}_\Delta^\nu \tag{2.9}$$

---

* $T^+ (M_4)$ és el conjunt de vectors tangents a M_4 i orientats cap al futur.

En resum, a partir del lagrangià singular (2.1) hom deriva una família de sistemes diferencials de segon ordre $\{D_l\}_l$ sobre la subvarietat $\widetilde{\mathcal{V}}$, que anomenarem sistema lagrangià singular (S.L.S.) associat a (2.1).

Per tant, donades unes condicions inicials $z_0 = (x^\mu_{0A}, \dot{x}^\nu_{0B}) \in \widetilde{\mathcal{V}}$ i fixada una prescripció per a la funció arbitrària $l(x_B, \dot{x}_C, \lambda)$ –és a dir, per a cada sistema D_l– existeix una única línea d'univers del sistema:

$$x^\mu_A = \varphi^\mu_A(\lambda, z_0; [l]) , \quad A = 1,2 , \quad \lambda \in \,]\varepsilon_1, \varepsilon_2[\, \subset \mathbb{R} \tag{2.10}$$

tal que:

i) passa per z_0:

$$\varphi^\mu_A(0, z_0; [l]) = x^\mu_{0A}$$
$$\dot{\varphi}^\mu_A(0, z_0; [l]) = \dot{x}^\mu_{0A} \quad ; \quad \dot{\varphi}^\mu_A \equiv \frac{\partial \varphi^\mu_A}{\partial \lambda} \tag{2.11}$$

ii) és una integral del sistema D_l:

$$\ddot{\varphi}^\mu_A(\lambda, z_0; [l]) = \Xi^\mu_A(\varphi_B(\lambda, z_0; [l]), \dot{\varphi}_B(\lambda, z_0; [l]), \lambda) \tag{2.12}$$

$$\forall \lambda \in I \; ; \quad (\varphi^\mu_A(\lambda, z_0; [l]) , \; \dot{\varphi}^\nu_B(\lambda, z_0; [l])) \in \widetilde{\mathcal{V}} \tag{2.13}$$

El resultat següent, demostrat per D.G.L. [8] estableix una mena d'unicitat entre les trajectòries integrals del S.L.S. (2.9) que hom obté per a les diferents prescripcions de la funció l amb unes condicions inicials donades $z_0 \in \widetilde{\mathcal{V}}$.

1. Proposició. Siguin $z_0 \in \widetilde{\mathcal{V}}$ i $l(x_B, \dot{x}_C, \lambda)$ una determinada prescripció per a la funció arbitrària del segon membre de (2.9). Sigui $\varphi^\mu_A(\lambda, z_0, [l])$; la trajectòria (2.10). Llavors existeix una reparametrització $f: I \longrightarrow J \subset \mathbb{R}$ tal que:

$$\forall \lambda \in I , \quad \varphi^\mu_A(\lambda, z_0; [l]) = \varphi^\mu_A(f(\lambda), z_0; [0]) \; ; \quad A = 1,2 \tag{2.14}$$

III. Sistemes Predictius Invariants

1. Definició. [9], [10]. Direm que dos camps de vectors sobre $T^+(M_4)^2$:(*)

$$\vec{H}_A(x_B,\pi_C) = \pi^\mu_{(A)} \frac{\partial}{\partial \chi^\mu_{(A)}} + \theta^\mu_{(A)}(x_B,\pi_C) \cdot \frac{\partial}{\partial \pi^\mu_{(A)}} \tag{3.1}$$

formen un sistema predictiu de dues partícules invariants pel grup de Poincaré (S.P.I.) quan:

i)
$$\pi^\mu_{(A)} \; \theta_{(A)\mu}(x_B,\pi_C) = 0 \tag{3.2}$$

ii) El claudàtor de Lie dels dos camps $\vec{H}_1$ i $\vec{H}_2$ és zero:

$$[\vec{H}_1 , \vec{H}_2] = 0 \tag{3.3}$$

iii) $\vec{H}_1$ i $\vec{H}_2$ són invariants sota el grup de Poincaré.

És a dir, $\theta^\mu_A(x_B,\pi_C)$ es transforma com un quadrivector sota transformacions de Poincaré.

La condició (3.3) garanteix la integrabilitat del sistema (3.1) (vegeu ref. [11]).

Això vol dir que $\forall \underset{o}{z} = (\underset{o}{\chi}_A, \underset{o}{\pi}_B) \in T^+(M_4)^2$ passa una única 2-superfície integral del sistema:

$$x^\mu_A = \psi^\mu_A(\lambda_A, \underset{o}{z}) \;\; ; \;\; \pi^\mu_A = \psi^{\mu\prime}_A(\lambda, \underset{o}{z}) \;\; ; \;\; \lambda_A \in I_A \;\; ; \; A = 1,2 \tag{3.4}$$

on:

$$\psi^{\mu\prime}_A \equiv \frac{\partial \psi^\mu_A}{\partial \lambda_A}$$

tal que:

$$\underset{o}{x}^\mu_A = \psi^\mu_A(0, \underset{o}{z}) \quad , \quad \underset{o}{\pi}^\mu_A = \psi^{\mu\prime}_A(0, \underset{o}{z}) \tag{3.5}$$

(*) En aquesta secció i sempre que fem referència a un S.P.I. representarem els punts genèrics de $T^+(M_4)^2$ per (χ_A, π_B) a diferència de la notació (χ_A, χ_B) emprada en referir-nos a un S.L.S. Aquesta distinció, supèrflua des del punt de vista matemàtic, és deguda d'una banda al fet que volem conservar la notació típica dels treballs clàssics de la M.R.P. [9], [10] i de l'altra al fet que volem fer ressaltar que π^2_A és una integral primera de $\vec{H}_A$ i que per a cada partícula el paràmetre de la línia d'univers integral de (3.1) és relacionat amb els seus temps i massa propis.

De la condició (3.2) resulta evident que:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_A}\left(\psi^{\mu'}_{(A)}(\lambda_A, \underset{o}{z}) \cdot \psi'_{(A)\mu}(\lambda_A, \underset{o}{z})\right) = 0 \quad , \quad \lambda_A \in I_A \quad , \quad A = 1,2 \tag{3.6}$$

En la terminologia de Droz-Vincent [12] (3.4) és la 2-superfície fàsica del sistema que passa per $\underset{o}{z}$. La línia d'univers individual de cada partícula a partir de les condicions inicials $\underset{o}{z}$ és, per tant:

$$x^{\mu}_A = \psi^{\mu}_A(\lambda_A, \underset{o}{z}) \quad , \quad \lambda_A \in I_A \quad , \quad A = 1,2 \tag{3.7}$$

2. **Definició**. Direm que el SPI (3.1) és una extensió predictiva del S.L.S. (2.9) quan: $\forall \underset{o}{z} = (\underset{o}{x}_B, \underset{o}{\dot{x}}_c) \in \tilde{\mathcal{V}}$, per a qualsevol funció contínua $l(x_B, \dot{x}_c, \lambda)$ i $\forall (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^{+2}$, (les constants β_1 , β_2 fixen la relació entre el paràmetre de les trajectòries i els temps propis de les partícules) existeixen dues reparametritzacions (una per a cada línia d'univers):

$$\left.\begin{aligned} f_A(\underset{o}{z};[l]) : I &\longrightarrow I_A \\ \lambda &\longrightarrow f_A(\lambda, \underset{o}{z};[l]) \end{aligned}\right\} \qquad A = 1,2$$

bijectives elles i llurs inverses, tals que:

$$\varphi^{\mu}_A(\lambda, \underset{o}{z};[l]) = \psi^{\mu}_A\left(f_A(\lambda, \underset{o}{z};[l]), \underset{o}{x}_B, \beta_c \frac{\underset{o}{\dot{x}}_c}{\sqrt{-\underset{o}{\dot{x}}^2_c}}\right) \tag{3.8}$$

D'aquesta condició i de les dades inicials (2.11) i (3.5) hom dedueix immediatament:

$$f_A(0, \underset{o}{z};[l]) = 0 \quad ; \quad \dot{f}_A(0, \underset{o}{z};[l]) = \frac{\sqrt{-\underset{o}{\dot{x}}^2_A}}{\beta_A} \quad ; \quad \dot{f}_A \equiv \frac{\partial f_A}{\partial \lambda} \tag{3.9}$$

3. **Proposició**. La condició necessària i suficient perquè el S.P.I. (3.1) sigui una extensió predictiva del S.L.S. (2.9) és que:

$$\forall z = (x_B, \pi_c) \in \mathcal{V} \quad \wedge \quad \forall (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^{+2} \;/\; (x_B, \alpha_c \pi_c) \in \tilde{\mathcal{V}}$$

$$\theta^{\mu}_{A}(x_B, \pi_c) = \alpha^{-2}_{(A)} \, P^{\mu}_{(A)\,\nu} \cdot a^{\nu}_{(A)}(x_B, \alpha_c \pi_c) \tag{3.10}$$

Demostració.

a) Necessària: Suposem que el SPI (3.1) és una extensió predictiva del S.L.S. (2.9). Sigui $\xi = (\overset{\circ}{x}_B, \overset{\circ}{\pi}_c) \in \mathcal{V}$, i sigui $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^{+2}$ qualsevulla tal que: $\tilde{\xi} \equiv (\overset{\circ}{x}_B, \alpha_c \overset{\circ}{\pi}_c) \in \tilde{\mathcal{V}}$. . Aplicant la definició (3.2): $\forall (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^{+2}$ i $\forall$ funció contínua $l(x_B, \dot{x}_c, \lambda)$, existiran dues reparametritzacions $f_A(\overset{\circ}{\xi}, [l])$ tals que:

$$\varphi^{\mu}_{A}(\lambda, \overset{\circ}{x}_B, \alpha_c \overset{\circ}{\pi}_c; [l]) = \psi^{\mu}_{A}\left(f_A(\lambda, \tilde{\overset{\circ}{\xi}}; [l]), \overset{\circ}{x}_B, \beta_c \frac{\overset{\circ}{\pi}_c}{\sqrt{-\overset{\circ}{\pi}{}^2_c}}\right) \tag{3.11}$$

En particular, ens convé de prendre $\beta_c = \sqrt{-\overset{\circ}{\pi}{}^2_c}$, c = 1,2. En aquest cas, (3.9) ens dira:

$$f_A(0, \tilde{\overset{\circ}{\xi}}; [l]) = 0 \qquad ; \qquad \dot{f}_A(0, \tilde{\overset{\circ}{\xi}}; [l]) = \alpha_A \tag{3.12}$$

Derivant dues vegades (3.11) respecte de λ, fent λ = 0 i utilitzant (3.12) juntament amb les condicions inicials (2.11) i (3.5), obtenim:

$$\ddot{f}_{(A)}(0, \tilde{\overset{\circ}{\xi}}; [l]) \cdot \alpha_{(A)} \; \overset{\circ}{\pi}{}^{\mu}_{(A)} + \alpha^2_{(A)} \, \theta^{\mu}_{(A)}(\overset{\circ}{x}_B, \overset{\circ}{\pi}_c) = \Xi^{\mu}(\overset{\circ}{x}_B, \alpha_c \overset{\circ}{\pi}_c; [l]) \tag{3.13}$$

Projectant (3.13) ortogonalment a π^{μ}_{A}, obtenim (3.10) d'una manera immediata.

b) Suficient: Donat un $(\overset{\circ}{x}_B, \overset{\circ}{\dot{x}}_c) \in \tilde{\mathcal{V}}$, una parella $(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^{+2}$ i una funció contínua $l(x_B, \dot{x}_c, \lambda)$, considerem la solució del S.L.S. (2.9):

$$\varphi^{\mu}_{A}(\lambda) \equiv \varphi^{\mu}_{A}(\lambda, \overset{\circ}{x}_B, \overset{\circ}{\dot{x}}_c; [l]) \quad ; \quad \lambda \in I \quad , \qquad A = 1,2$$

Reparametritzem les línies d'univers segons:

$$\psi^{\mu}_{A}(\lambda_A) = \varphi^{\mu}_{A}(g_A(\lambda_A)) \quad , \quad A = 1,2 \tag{3.14}$$

on les funcions $g_A : I_A \longrightarrow I$ són:

i) bijectives i diferenciables tant elles com llurs inverses:

ii) $\quad g_A(0) = 0 \quad , \quad g'_A(0) = \dfrac{\beta_A}{\sqrt{-\dot{\underset{\circ}{x}}{}_A^2}} \quad ; \quad g'_A \equiv \dfrac{d g_A}{d\lambda_A}$ (3.15)

iii) les f_A satisfan les equacions diferencials:

$$\ddot{f}_A + \frac{\dot{f}_{(A)}}{\dot{\varphi}_{(A)}(\lambda)^2} \cdot \dot{\varphi}_{(A)\,\mu}(\lambda) \cdot a^{\mu}_{(A)}\left(\varphi_B(\lambda), \dot{\varphi}_C(\lambda)\right) - l\left(\varphi_B(\lambda), \dot{\varphi}_C(\lambda), \lambda\right) = 0 \qquad (3.16)$$

És fàcil de comprovar que, gràcies a la condició (3.10), les línies d'univers (3.14) són integrals del SPI (3.1) i que, a més:

$$\psi^{\mu}_A(0) = \underset{\circ}{x}{}^{\mu}_A \quad , \quad \psi^{\mu\,\prime}_A(0) = \beta_A \cdot \frac{\dot{\underset{\circ}{x}}{}^{\mu}_A}{\sqrt{-\dot{\underset{\circ}{x}}{}_A^2}} \quad ; \quad \psi^{\mu\,\prime}_A \equiv \frac{d\psi^{\mu}_A}{d\lambda_A} \qquad (3.17)$$

En conseqüència, les $\psi^{\mu}_A(\lambda_A)$ definides per (3.14) són les trajectòries solució del SPI (3.1): $\psi^{\mu}_A(\lambda_A, \underset{\circ}{x}_B, \beta_C\, \dot{\underset{\circ}{x}}_C/\sqrt{-\dot{\underset{\circ}{x}}{}_C^2})$, amb què resta demostrada la proposició.

IV. Construcció de l'extensió predictiva

En aquesta secció construirem un SPI que sigui extensió predictiva del SLS (2,9).

La condició (3.10) ens determina les funcions $\theta^{\mu}_A(x_B, \pi_C)$ per als $(x_B, \pi_C) \in \mathcal{V}$. Per tant, la prendrem com a condició de contorn per a integrar el sistema d'equacions (3.3), que hom pot escriure també:

$$\pi^{\alpha}_{(A')} \cdot \frac{\partial \theta^{\mu}_A}{\partial x^{\alpha}_{(A')}} + \theta^{\alpha}_{(A')} \cdot \frac{\partial \theta^{\mu}_A}{\partial \pi^{\alpha}_{(A')}} = 0 \quad ; \quad A = 1, 2 \ ; \ A \neq A' \qquad (4.1)$$

Per tal que (3.10) sigui una bona condició de contorn cal, en primer lloc, que sigui compatible amb (4.1). Això ho provarem per construcció, en la hipòtesi que θ^{μ}_A és analítica en una constant d'acoplament g, que introduïrem prenent: $V(x^2) \equiv g\, W(x^2)$ (4.2)

En segon lloc, cal que el segon membre de (3.10) es transformi com un quadrivector sota el grup de Poincaré, la qual cosa és trivial a partir de (4.5).

En tercer lloc, cal que el segon membre de (3.10) no depengui de la parella $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^{+2}$. Això es compleix en aquest cas, ja que donat $(\chi_B, \pi_C) \in \mathcal{V}$, per a qualsevol $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^{+2}$ tal que $(\chi_B, \alpha_C \pi_C) \in \tilde{\mathcal{V}}$, s'haurà de satisfer, d'acord amb (2.8):

$$\frac{\alpha_{A'}}{\alpha_A} = \frac{P_\mu \Pi_A^\mu}{P_\mu \Pi_{A'}^\mu} \quad , \quad A' \neq A \tag{4.3}$$

Tenint aquesta relació en compte, així com (2.4), el segon membre de (3.10) s'escriu:

$$\chi_{(A)}^{-2} \cdot \underset{(A)}{P}{}^\mu{}_\nu \cdot a_{(A)}^\nu (x_B, \alpha_C \Pi_C) =$$

$$= g\,\eta_{(A)}\, W'(x^2) \cdot \frac{\Pi_A}{\sqrt{U_A}} \left\{ \frac{\Pi_A}{\sqrt{U_A}} + \frac{\alpha_{A'}}{\alpha_A} \cdot \frac{\Pi_{A'}}{\sqrt{U_{A'}}} \right\} \underset{(A)}{P}{}^\mu{}_\nu\, x^\nu \tag{4.4}$$

que tan sols depèn de la raó $\dfrac{\alpha_{A'}}{\alpha_A}$. Així, tenim que θ_A^μ no depèn de les α_B:

$$\vartheta_A^\mu(x_B, \Pi_C) = g\,\eta_A W' \cdot \left\{ 1 + \sqrt{\frac{U_A}{U_{A'}}} \cdot \frac{\Pi_1 \cdot \Pi_2 \cdot \sqrt{U_A} + k \cdot \sqrt{U_{A'}}}{k\sqrt{U_A} + \Pi_1 \cdot \Pi_2 \cdot \sqrt{U_{A'}}} \right\} \cdot \frac{\Pi_A^2}{U_A} \cdot \tag{4.5}$$

$$\cdot \left(x_A^\mu + \frac{(x\Pi_A)}{\Pi_A^2}\, \Pi_A^\mu \right)$$

on:

$$\Pi_B \equiv \sqrt{-\Pi_B^\mu \Pi_{B\mu}} \quad , \quad k \equiv -\Pi_1^\mu \Pi_{2\mu} \quad ; \quad (x_B, \Pi_C) \in \mathcal{V}$$

L'equació (4.1) pot ésser convertida en una equació integrodiferencial [9]. En el cas de dues partícules, això es fa fàcilment utilitzant les variables següents:

$$\left.\begin{array}{l} z_A \equiv \eta_A \Lambda^{-2} \left(\Pi_{A'}^2 (x\Pi_A) - k\,(x\Pi_{A'}) \right) \quad , \; A = 1, 2 \\ \Lambda^2 \equiv k^2 - \Pi_1^2 \cdot \Pi_2^2 \quad ; \quad h^\alpha \equiv x^\alpha - \eta^B z_B \Pi_B^\alpha \\ t_A^\alpha \equiv \Pi_{A'}^2 \cdot \Pi_A^\alpha - k\,\Pi_{A'}^\alpha \end{array}\right\} \tag{4.6}$$

Si definim: $D_A \equiv \Pi_{(A)}^\alpha \cdot \dfrac{\partial}{\partial x_{(A)}^\alpha}$, es verifica: [13]

$$\left.\begin{aligned} &D_A z_B = \delta_{AB} \quad ; \quad D_A h^2 = D_A k = D_A \pi_B = 0 \\ &D_A h^\alpha = D_A t^\alpha_B = 0 \qquad ; \qquad A,B = 1,2 \end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

En aquestes variables, hom escriu l'equació (2.5) que defineix la sots-varietat $\mathcal{V}$ de la manera següent:

$$\begin{aligned} &\left(\pi_A \cdot \pi_{A'} \cdot \sqrt{U_A} + k \cdot \sqrt{U_{A'}}\right) \cdot \pi_A z_A = \\ &\quad = \left(\pi_A \cdot \pi_{A'} \sqrt{U_{A'}} + k \cdot \sqrt{U_A}\right) \cdot \pi_{A'} \cdot z_{A'} \end{aligned} \tag{4.8}$$

i d'aquesta podem aïllar: $\qquad z_{A'} = \psi_A(z_A, h^2, k, \pi_B) \qquad$ (4.9)

Expressant θ^μ_A en aqúestes variables i tenint en compte que $D_A = \frac{\partial}{\partial z_A}$, podem enunciar la següent:

1. Proposició: El sistema d'equacions (4.1) amb les condicions de contorn (4.5) sobre la sots-varietat $\mathcal{V}$, donada per a (4.8), és equivalent al sistema d'equacions integrodiferencials:

$$\theta^\mu_A = \underset{*}{\theta}{}^\mu_A - \int_{\hat{z}_{A'}}^{z_{A'}} dz_{A'} \cdot \left(\theta^\alpha_{A'} \cdot \frac{\partial \theta^\mu_A}{\partial \pi^\alpha_{A'}}\right) \tag{4.10}$$

on: $\quad \hat{z}_{A'} = \psi_A(z_A, h^2, k, \pi_B) \quad$ i $\quad \underset{*}{\theta}{}^\mu_A(z_A, h^2, k, \pi_B, h^\alpha, t^\alpha_B)$

resulta de substituir $z_{A'}$ per $\psi_A(z_A, h^2, k, |\pi_B|)$ a l'expressió (4.5).

La demostració és trivial.

Ara podem resoldre (4.10) suposant que θ^μ_A és desenvolupable en sèrie de potències de g. En primer lloc, gràcies a les condicions i), iii) de la definició (3.1) descomponem les quadriacceleracions segons:

$$\theta^\mu_A = \eta_A a_A h^\mu + l_{AA'} t^\mu_{A'} \tag{4.11}$$

on a_A, $l_{AA'}$ són funcions de les variables escalars z_B, h^2, k i $|\pi_C|^2$ (B,C = 1,2), les quals suposarem desenvolupables en sèrie de potències de g:

$$a_A = \sum_{n=1}^{\infty} g^n \cdot \overset{(n)}{a}_A \quad ; \quad l_{AA'} = \sum_{n=1}^{\infty} g^n \cdot \overset{(n)}{l}_{AA'} \tag{4.12}$$

També, suposant W (x^2) desenvolupable en sèrie de potències (excepte, potser, en un nombre finit de punts), tindrem de (4-8,9):

$$\psi_A = \sum_{n=0}^{\infty} g^n \cdot \overset{(n)}{\psi}_A \tag{4.13}$$

I, atès que $\underset{*}{\Theta}{}^{\mu}_{A}$ ha estat construïda a partir de Θ^{μ}_{A} i ψ_{A}, per a $\underset{*}{\Theta}{}^{\mu}_{A}$ valdrà un desenvolupament anàleg al de Θ^{μ}_{A}.

En desenvolupar (4.10) en sèrie de potències de **g** ens trobem amb la dificultat que $\hat{z}_{A'}$ límit inferior de la integral, depèn de g.

2. **Lema:** Sigui $f(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta} h(x,y)dy$ i suposem que **f**, **h** i α són desenvolupables en sèrie de potències de la variable **x**. Llavors:

$$\overset{(n)}{f} = \int_{\overset{(0)}{\alpha}}^{\beta} \overset{(n)}{h}(y)\cdot dy - \sum_{m=1}^{n} \sum_{\substack{m_i \geq 1 \\ m_1+\ldots+m_p=m}} \frac{1}{p!} \left(\frac{\partial^{p-1} \overset{(n-m)}{h}}{\partial y^{p-1}} \right)_{y=\overset{(0)}{\alpha}} \cdot \overset{(m_1)}{\alpha} \cdots \overset{(m_p)}{\alpha} \tag{4.14}$$

on:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \overset{(n)}{f} \cdot x^n \; ; \quad \alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \overset{(n)}{\alpha} \cdot x^n \; ; \quad h(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \overset{(n)}{h}(y) \cdot x^n$$

Demostració: Sigui H (x,y) una primitiva de h (x,y) considerant **x** com a paràmetre: $\left(\frac{\partial H(x,y)}{\partial y} \right) = h(x,y)$

Tindrem:

$$\begin{aligned} f(x) &= H(x,\beta) - H(x,\alpha(x)) = \\ &= H(x,\beta) - H(x,\overset{(0)}{\alpha}) - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} \left(\frac{\partial^p H}{\partial y^p} \right)(x,\overset{(0)}{\alpha}) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \overset{(m)}{\alpha} x^m \right)^p = \\ &= \int_{\overset{(0)}{\alpha}}^{\beta} h(x,y)\cdot dy - \sum_{n=1}^{\infty} x^n \left\{ \sum_{m=1}^{n} \sum_{\substack{m_i \geq 1 \\ m_1+\ldots+m_p=m}} \frac{1}{p!} \left(\frac{\partial^{p-1} \overset{(n-m)}{h}}{\partial y^{p-1}} \right)_{y=\overset{(0)}{\alpha}} \cdot \overset{(m_1)}{\alpha} \cdots \overset{(m_p)}{\alpha} \right\} \end{aligned}$$

d'on hom dedueix (4.14) d'una manera immediata.

Utilitzant el lema (4.2), juntament amb les equacions (4.11, 12, 13), obtenim:

$$\begin{aligned} \overset{(n)}{\Theta}{}^{\mu}_{A} &= \underset{*}{\overset{(n)}{\Theta}}{}^{\mu}_{A} + \int_{\overset{(0)}{\psi}_A}^{z_{A'}} \overset{(n)}{Z}{}^{\mu}_{A} \cdot dz_{A'} - \\ &- \sum_{m=1}^{n-2} \sum_{m_i \geq 1 \,:\, m_1+\ldots+m_p=m} \frac{1}{p!} \overset{(m_1)}{\psi}_A \cdots \overset{(m_p)}{\psi}_A \cdot \left(D_{A'}^{p-1} \overset{(n-m)}{Z}{}^{\mu}_{A} \right)_{z_{A'}=\overset{(0)}{\psi}_A} \end{aligned} \tag{4.15}$$

on $\overset{(n)}{Z}{}^{\mu}_{A}$ és el coeficient de g^n en el desenvolupament de $-\theta^{\alpha}_{A'}\cdot\dfrac{\partial\theta^{\mu}_{A}}{\partial\pi^{\alpha}_{A'}}$

(vegeu apèndix 1); el sumatori va fins a $m = n-2$, perquè $\overset{(p)}{Z}{}^{\mu}_{A} = 0$ per a $p < 2$.

A l'apèndix 1 hi ha també les components de $\overset{(n)}{\theta}{}^{\mu}_{A}$.

3. Proposició: Les condicions de contorn (4.5) donades sobre la sots-varietat $\mathcal{V}$ determinen una solució θ^{μ}_{A} única de les equacions (4.1), en la hipòtesi que aquesta és desenvolupable en sèrie de potències de g i que $W(x^2)$ és analítica excepte en un nombre finit de punts.

Demostració: De (4.15) tenim: $\overset{(1)}{\theta}{}^{\mu}_{A} = \underset{*}{\overset{(1)}{\theta}}{}^{\mu}_{A}$ i també que $\overset{(n)}{\theta}{}^{\mu}_{A}$ resta determinat pels $\underset{*}{\overset{(k)}{\theta}}{}^{\mu}_{A}$, $K < n$ (vegeu apèndix 1). Per tant, per inducció resten determinats els $\overset{(n)}{\theta}{}^{\mu}_{A}$, $n \in \mathbb{N}$, un cop coneguts els $\underset{*}{\overset{(n)}{\theta}}{}^{\mu}_{A}$, $\overset{(n)}{\psi}_{A}$, coeficients dels desenvolupaments de (4.5) i (4.9), respectivament.

Calculem ara els $\overset{(n)}{\psi}_{A}$ als ordres inferiors. A l'equació (4.8) els $\mathcal{U}_B$ depenen de:

$$x^2 = h^2 - \pi_A^2 z_A^2 - \pi_{A'}^2 z_{A'}^2 + 2k\, z_A z_{A'} \tag{4.16}$$

Sobre $\mathcal{V}$, però, $z_{A'} = \psi_A(z_A, h^2, k, |\pi_B|)$. Suposant W analítica (excepte, potser, en un nombre finit de punts), tenim:

$$\left.\begin{aligned}
\overset{(0)}{\psi}_{A} &= \frac{k+\pi_A^2}{k+\pi_{A'}^2}\cdot z_A \\
\overset{(1)}{\psi}_{A} &= -\frac{\Lambda^2 z_A\,(\pi_A^2-\pi_{A'}^2)}{2\,\pi_A^2\,\pi_{A'}^2\,(k+\pi_A^2)^2}\; W(\hat{x}_A^2)
\end{aligned}\right\} \tag{4.17}$$

on:
$$\hat{x}_A^2 \equiv h^2 + \frac{\Lambda^2(2k+\pi_A^2+\pi_{A'}^2)}{(K+\pi_A^2)^2}\, z_A^2 \tag{4.18}$$

Anàlogament, podem desenvolupar $\underset{*}{\theta}{}^{\mu}_{A}$. El càlcul és enfarfegador, i a primer ordre el resultat és:

$$\left.\begin{aligned} \overset{(1)}{a}_A &= \left(1+\frac{k+\pi_A^2}{k+\pi_{A'}^2}\right) W'(\hat{x}_A^2) \\ \underset{*}{\overset{(1)}{l}}_{AA'} &= -\frac{k+\pi_A^2}{k+\pi_{A'}^2}\cdot\left(1+\frac{k+\pi_A^2}{k+\pi_{A'}^2}\right)\cdot\frac{z_A}{\pi_A^2}\cdot W'(\hat{x}_A^2) \end{aligned}\right\} \tag{4.19}$$

on W' és la derivada de W (x^2) respecte de x^2. El segon ordre de $\underset{*}{\theta}_A^\mu$ el donem a l'apèndix 2.

L'acceleració θ_A^μ a primer ordre en g ens queda:

$$\theta_A^\mu = g\cdot\left(1+\frac{k+\pi_A^2}{k+\pi_{A'}^2}\right)\cdot W'(\hat{x}_A^2)\cdot$$
$$\cdot\left\{\eta_A h^\mu - \frac{k+\pi_A^2}{k+\pi_{A'}^2}\cdot\frac{z_A}{\pi_A^2}\cdot t_{A'}^\mu\right\} + O(g^2) \tag{4.20}$$

I els coeficients del segon ordre són:

$$\left.\begin{aligned} \overset{(2)}{a}_A &= \underset{*}{\overset{(2)}{a}}_A + \int_{\overset{(0)}{\psi}_A}^{z_{A'}} \overset{(2)}{A}_A(z_{A'})\cdot dz_{A'} \\ \overset{(2)}{l}_{AA'} &= \underset{*}{\overset{(2)}{l}}_{AA'} + \int_{\overset{(0)}{\psi}_A}^{z_{A'}} \overset{(2)}{L}_{AA'}(z_{A'})\cdot dz_{A'} \end{aligned}\right\} \tag{4.21}$$

on: $\underset{*}{\overset{(2)}{a}}_A$, $\underset{*}{\overset{(2)}{l}}_{AA'}$, $\overset{(2)}{A}_A$, $\overset{(2)}{L}_{AA'}$ estan explicitats a l'apèndix 2, i les integrals dependran de la forma del potencial W (x^2).

5. Aplicacions: Atès que ha estat la recerca d'una interacció realista entre quarks la que ens ha portat a aquest model [5], donarem ací els resultats anteriors per al cas particular $m_1 = m_2 = m$.

En aquest cas les expressions se simplifiquen molt:

$$\overset{(0)}{\psi}_A = z_A \quad ; \quad \overset{(n)}{\psi}_A = 0 \quad , \quad \forall n \geq 1 \tag{5.1}$$

i per tant desapareix el sumatori del segon membre de (4.15). El càlcul de θ_A^μ és fàcil i ens queda per a l'ordre **n** de les acceleracions:

$$\overset{(n)}{\theta_A^\mu} = g \cdot W'(\hat{x}_A^2) \cdot \left(\frac{W(\hat{x}_A^2)}{m^2} \right)^{n-1} \cdot \{ \eta_A h^\mu - \frac{z_A}{m^2} t_{A'}^\mu \} + \int_{z_A}^{z_{A'}} \overset{(n)}{Z_A^\mu} \, d z_{A'} \tag{5.2}$$

Les expressions per a $\overset{(2)}{A_A}$ i $\overset{(2)}{L_{AA'}}$ són a l'apèndix 2.

Com a aplicacions estudiarem el cas d'un oscil·lador harmònic $W \propto x^2$, que és utilitzat per als quarks [4], i després un potencial del tipus $W \propto (x^2)^{-1/2}$ com a una aproximació relativista al problema de Kepler.

Per tal de determinar la constant de proporcionalitat en ambdós casos estudiarem el lagrangià (2.1) a l'aproximació newtoniana en el sistema de referència del centre de masses $-P^\mu = (P, 0, 0, 0)$. En aquest, la condició (2.5) implica: $x_1^0 = x_2^0 = t$, $x^2 = |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2$.

Prenent **t** com paràmetre i a l'aproximació newtoniana:

$$\frac{|V(x^2)|}{\vec{v}_A^{\,2}} \sim 1 \quad ; \quad \vec{v}_A^{\,2} \ll 1 \quad ; \quad \vec{v}_A^{\,2} \equiv \delta_{ij} \dot{x}_A^i \dot{x}_A^j$$

obtenim:

$$\mathcal{L} = -(m_1 + m_2) + \frac{1}{2} \varepsilon^A m_A \vec{v}_A^{\,2} + \frac{1}{2\mu} \cdot V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2) + O(\vec{v}_A^{\,4}) \tag{5.3}$$

Comparant amb els lagrangians de l'oscil·lador newtonià i de Kepler, respectivament, obtenim:

$$V_{osc}(x^2) = -\mu^2 \omega^2 x^2 \quad ; \quad V_K(x^2) = 2GM\mu^2 (x^2)^{-1/2} \tag{5.4}$$

essent: $\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{M}$ la massa reduïda, $M = m_1 + m_2$ la massa total, ω la freqüència newtoniana de l'oscil·lador, i **G** la constant de gravitació universal.

Estudiem ara el cas de l'oscil·lador. Prenem, segons (5.4) i (4.2):

$$g = \omega^2 \quad , \quad W(x^2) = -\mu^2 x^2 \tag{5.5}$$

Les triacceleracions per a un observador qualsevulla són donades per: [13]

$$a_A^i(\vec{x}_B, \vec{v}_c, t) = m_A^{-2} \cdot \gamma_A^{-2} \cdot (\delta_j^i - v_A^i v_A^j) \cdot \theta_A^j (x_1^0 = x_2^0 = t) \tag{5.6}$$

on: $\pi_A^\mu = m_A \cdot \gamma_A (1, \vec{v}_A)$, $\gamma_A = (1 - \vec{v}_A^2)^{-1/2}$

Explicitant θ_A^j a (5.6), restituint la c i desenvolupant en sèrie de potències d' $1/c^2$, obtenim:

$$\vec{a}_A = -\eta_A \frac{\mu\omega^2}{m_A} \cdot \left(1 - \frac{\vec{v}_A^2}{c^2} + \frac{m_A (m_{A'} - m_A)}{M^2} \cdot \frac{\vec{v}^2}{2c^2}\right) \vec{r} +$$

$$+ \frac{\mu\omega^2}{m_A c^2} \cdot \frac{m_A (\vec{r} \cdot \vec{v}_A) + m_{A'} (\vec{r} \cdot \vec{v}_{A'})}{M} \vec{v} + O\left(\frac{\omega^2}{c^4}\right) + O(\omega^4) \tag{5.7}$$

que ens dóna les correccions relativistes a l'oscil·lador harmònic per a aquest model.

Per a masses iguals, el segon ordre té una expressió senzilla.

$$\overset{(2)}{a}_A = \frac{m^2}{8} \cdot \{h^2 + 2(k - m^2) \cdot z_A^2\} + \frac{m^4}{8} (z_A - z_{A'})^2$$

$$\overset{(2)}{l}_{AA'} = -\frac{1}{8} \{h^2 + 2(k - m^2) \cdot z_A^2\} z_A + \frac{m^2}{4} \cdot \left\{\frac{h^2}{k + m^2} (z_{A'} - z_A) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{3} (z_{A'}^3 - z_A^3) + \frac{k z_A}{2m^2} (z_{A'}^2 - z_A^2)\right\} \tag{5.8}$$

Estudiem finalment el cas del potencial de tipus Kepler:

$$g = G \quad ; \quad W(x^2) = 2M\mu^2 (x^2)^{-1/2} \tag{5.9}$$

Les triacceleracions a primer ordre en G i a ordre $1/c^2$ són:

$$\vec{a}_A = -\eta_A G m_{A'} \cdot \left\{ 1 - \frac{\vec{v}_A^2}{c^2} + \frac{m_A(m_{A'} - m_A)}{M^2} \cdot \frac{\vec{v}^2}{2c^2} \right\} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} +$$

$$+ \frac{G m_{A'}}{c^2} \cdot \frac{m_A (\vec{r} \cdot \vec{v}_A) + m_{A'} (\vec{r} \cdot \vec{v}_{A'})}{M} \cdot \frac{\vec{v}}{r^3} +$$

$$+ \eta_A \cdot \frac{3 G m_{A'}}{2c^2} \cdot \left\{ (\vec{r} \cdot \vec{v}_{A'})^2 - \left(\frac{m_A}{M}\right)^2 (\vec{r} \cdot \vec{v})^2 \right\} \cdot \frac{\vec{r}}{r^5} +$$

$$+ O\left(\frac{G}{c^4}, \frac{G^2}{c^2}\right) \tag{5.10}$$

Les quals es poden comparar amb les que es deriven del lagrangià d'Einstein, Infeld i Hoffmann [14]:

$$\vec{a}_A^{EIH} = -\eta_A G m_{A'} \cdot \left\{ 1 - \frac{\vec{v}_A^2}{c^2} + \frac{2\vec{v}^2}{c^2} \right\} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} +$$

$$+ \frac{G m_{A'}}{c^2} \left\{ 4 (\vec{r} \cdot \vec{v}_A) - 3 (\vec{r} \cdot \vec{v}_{A'}) \right\} \cdot \frac{\vec{v}}{r^3} +$$

$$+ \eta_A \frac{3 G m_{A'}}{2c^2} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{v}_{A'})^2 \cdot \frac{\vec{r}}{r^5} + O\left(\frac{G}{c^4}, \frac{G^2}{c^2}\right) \tag{5.11}$$

Com veiem, la forma general de (5.10) i (5.11) és bastant semblant, però la segona no depèn de m_A i, per contra, la primera sí.

VI. Conclusió i perspectives

Hem donat una definició per a l'extensió predictiva del sistema lagrangià singular de dues partícules de Tabakayashy i Domenici, Gomis i Longui [5], i hem vist com mitjançant un mètode recurrent hom podia construir un sistema predictiu invariant equivalent.

La continuació d'aquest treball va en dues direccions diferents. D'una banda, la definició d'extensió predictiva que hem donat en aquest cas particular és immediatament generalitzable per a un sistema lagrangià singular qualsevulla de **N** partícules. D'altra, els resultats d'aquest treball ens serviran com a punt de partença per a estudiar un sistema de dos quarks lligats per un potencial de tipus oscil·lador. Això ho farem hamiltonitzant i, posteriorment, quantitzant el sistema predictiu invariant corresponent. Serà interessant de comparar l'espectre d'estats lligats que obtinguem per aquest mètode amb el que hom dóna habitualment a la literatura i veure què passa amb els estats de norma negativa.

Apèndix 1

$$\overset{(n)}{Z}{}^{\mu}_{A} = \eta_A \overset{(n)}{A}_A \cdot h^{\mu} + \overset{(n)}{L}_{AA'} \cdot t^{\mu}_{A'} \; ; \qquad \overset{(n)}{A}_A = \overset{(n)}{L}_{AA'} = 0 \quad , \quad n < 2$$

$$\overset{(n)}{A}_A = \sum_{m=1}^{n-1} \left\{ z_{A'} \cdot \overset{(m)}{a}_A \cdot \overset{(n-m)}{a}_{A'} + \pi_A^2 \, \overset{(m)}{a}_{A'} \, \overset{(n-m)}{l}_{AA'} - \overset{(m)}{a}_{A'} \cdot \left(N_{A'} \overset{(n-m)}{a}_A \right) - \overset{(m)}{l}_{A'A} \cdot \left(Q_{A'} \overset{(n-m)}{a}_A \right) \right\} , \quad n \geq 2$$

$$\overset{(n)}{L}_{AA'} = \sum_{m=1}^{n-1} \left\{ k \, \overset{(m)}{l}_{A'A} \, \overset{(n-m)}{l}_{AA'} - \Lambda^{-2} h^2 \cdot \overset{(m)}{a}_A \cdot \overset{(n-m)}{a}_{A'} - \overset{(m)}{a}_{A'} \cdot \left(N_{A'} \overset{(n-m)}{l}_{AA'} \right) - \overset{(m)}{l}_{A'A} \cdot \left(Q_{A'} \overset{(n-m)}{l}_{AA'} \right) \right\} , \quad n \geq 2$$

$$\overset{(n)}{a}_A = \underset{*}{\overset{(n)}{a}}_A + \int_{\overset{\circ}{\psi}_A}^{z_{A'}} \overset{(n)}{A}_A (z_{A'}) \cdot dz_{A'} - \sum_{m=1}^{n-2} \sum_{m_i \geq 1} \frac{1}{p!} \left(D_{A'}^{p-1} \overset{(n-m)}{A}_A \right)_{(\overset{\circ}{\psi}_A)} \cdot \overset{(m_1)}{\psi}_A \cdots \overset{(m_p)}{\psi}_A$$

$$\overset{(n)}{l}_{AA'} = \underset{*}{\overset{(n)}{l}}_{AA'} + \int_{\overset{\circ}{\psi}_A}^{z_{A'}} \overset{(n)}{L}_{AA'} (z_{A'}) \cdot dz_{A'} - \sum_{m=1}^{n-2} \sum_{m_i \geq 1} \frac{1}{p!} \left(D_{A'}^{p-1} \overset{(n-m)}{L}_{AA'} \right)_{(\overset{\circ}{\psi}_A)} \cdot \overset{m_1}{\psi}_A \cdots \overset{m_p}{\psi}_A$$

Apèndix 2

$$\underset{*}{\overset{(2)}{a}}_A = \frac{W(\hat{\chi}_A^2) \cdot W'(\hat{\chi}_A^2)}{2 m_A^2 m_{A'}^2 \cdot k_{A'}} \cdot \left\{ 4k^2 m_{A'}^2 + k \left(m_A^4 + 2 m_A^2 m_{A'}^2 + 5 m_{A'}^4 \right) + 2 m_{A'}^2 \left(m_A^4 + m_{A'}^4 \right) \right\} +$$

$$+ \left(1 + k_A / k_{A'} \right) \cdot W(\hat{\chi}_A^2) \cdot W^4(\hat{\chi}_A^2) \cdot \frac{\Lambda^4 z_A^2 \left(m_{A'}^2 - m_A^2 \right)}{m_A^2 \cdot m_{A'}^2 \cdot k_{A'}^3}$$

$$\underset{*}{\overset{(2)}{l}}_{AA'} = - \frac{W(\hat{\chi}_A^2) \cdot W'(\hat{\chi}_A^2) \cdot z_A}{2 m_A^4 m_{A'}^2 k_{A'}^3} \cdot \left\{ 2k^3 \left(3 m_{A'}^2 - m_A^2 \right) + 6 m_{A'}^2 k^2 \left(m_A^2 + m_{A'}^2 \right) + \left(m_A^6 + 6 m_A^4 m_{A'}^2 + 2 m_{A'}^6 + \right. \right.$$

$$\left. \left. + 3 m_{A'}^4 m_A^2 \right) + m_A^2 m_{A'}^2 \left(3 m_A^4 + m_{A'}^4 \right) \right\} + \frac{k_A}{k_{A'}} \left(1 + \frac{k_A}{k_{A'}} \right) \frac{\Lambda^4 z_A^3 \left(m_A^2 - m_{A'}^2 \right)}{m_A^4 m_{A'}^2 k_{A'}^3} \cdot W(\hat{\chi}_A^2) \cdot W'(\hat{\chi}_A^2)$$

on: $\quad k_A \equiv k + m_A^2 \quad , \quad m_A = \pi_A$

$$\overset{(2)}{A}_{\Delta} = \left\{ \frac{k_\Delta m_{\Delta'}^2 + k_{\Delta'} m_\Delta^2}{m_{\Delta'}^2\, k_\Delta} \cdot (k_\Delta + k_{\Delta'})\, z_{\Delta'} - \left(1 + \frac{k_\Delta}{k_{\Delta'}}\right)^2 \cdot z_\Delta \right\} \cdot W'(\hat{x}_\Delta^2) \cdot W'(\hat{x}_{\Delta'}^2) +$$

$$+ \left\{ \left(z_{\Delta'} - \frac{k\,(k_\Delta + k_{\Delta'})}{k_{\Delta'}^2}\, z_\Delta \right) \cdot \frac{2h^2 (k_\Delta + k_{\Delta'})^2}{k_\Delta \cdot k_{\Delta'}} + \frac{2\Lambda^2 (k_\Delta + k_{\Delta'})^3}{k_\Delta^2\, k_{\Delta'}^2} \cdot z_\Delta z_{\Delta'} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left(z_{\Delta'} - z_\Delta \cdot \frac{k \cdot k_{\Delta'}^2 + k_\Delta^2 \cdot m_{\Delta'}^2}{m_{\Delta'}^2 \cdot k_{\Delta'} \cdot (k_\Delta + k_{\Delta'})} \right) \right\} \cdot W'(\hat{x}_{\Delta'}^2) \cdot W''(\hat{x}_\Delta^2)$$

$$\overset{(2)}{L}_{\Delta\Delta'} = \left\{ \frac{(k_\Delta + k_{\Delta'})^2 \cdot h^2}{m_\Delta^2 \cdot k_\Delta \cdot k_{\Delta'}^2} + (k_\Delta + k_{\Delta'})\, z_\Delta \cdot z_{\Delta'} \cdot \frac{k \cdot k_\Delta \cdot k_{\Delta'} (k_\Delta + k_{\Delta'}) + \Lambda^2 (m_\Delta^2 - m_{\Delta'}^2)(2 k_\Delta + k_{\Delta'})}{m_\Delta^2\, m_{\Delta'}^2\, k_\Delta^2\, k_{\Delta'}^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{(k_\Delta + k_{\Delta'})^2 z_{\Delta'}^2}{m_\Delta^2\, k_\Delta k_{\Delta'}} \right\} \cdot W'(\hat{x}_\Delta^2) \cdot W'(\hat{x}_{\Delta'}^2) + \left\{ \frac{2k h^2 (k_\Delta + k_{\Delta'})^3}{m_\Delta^4\, k_{\Delta'}^4}\, z_\Delta^2 - \frac{2h^2 (k_\Delta + k_{\Delta'})^2}{m_\Delta^2\, k_{\Delta'}^2}\, z_\Delta z_{\Delta'} + \right.$$

$$\left. + \frac{k_\Delta k_{\Delta'} (k + k_{\Delta'}) - \Lambda^2 k_\Delta}{m_\Delta^2\, m_{\Delta'}^2\, k_\Delta k_{\Delta'}^4} \cdot 2\Lambda^2 (k + k_{\Delta'})^4 z_\Delta^3 z_{\Delta'} - \frac{2\Lambda^2 (k_\Delta + k_{\Delta'})^3}{m_\Delta^2\, k_\Delta\, k_{\Delta'}^3}\, z_\Delta^2 z_{\Delta'}^2 \right\} \cdot W'(\hat{x}_{\Delta'}^2) \cdot W''(\hat{x}_\Delta^2)$$

que per a masses iguals es redueixen a:

$$\overset{(2)}{A}_{\Delta} = 4\,(z_{\Delta'} - z_\Delta) \cdot W'(\hat{x}_\Delta^2) \cdot W'(\hat{x}_{\Delta'}^2) + 8 \cdot W'(\hat{x}_{\Delta'}^2) \cdot W''(\hat{x}_\Delta^2) \cdot \left\{ h^2 z_{\Delta'} - \frac{2k h^2 z_\Delta}{k + m_\Delta^2} - \Lambda^2 \frac{z_\Delta z_{\Delta'}}{m^2} + \right.$$

$$\left. + 2\,(k - m^2) \cdot z_\Delta z_{\Delta'}^2 \right\}$$

$$\overset{(2)}{L}_{\Delta\Delta'} = \frac{4}{m^2} \cdot \left(\frac{h^2}{k + m^2} - z_{\Delta'}^2 + \frac{k z_\Delta z_{\Delta'}}{m^2} \right) \cdot W'(\hat{x}_\Delta^2) \cdot W'(\hat{x}_{\Delta'}^2) + \frac{8 z_\Delta}{m^2} \cdot W'(\hat{x}_{\Delta'}^2) \cdot W''(\hat{x}_\Delta^2) \cdot$$

$$\cdot \left\{ \frac{2k h^2 z_\Delta}{k + m^2} - h^2 z_{\Delta'} + \frac{\Lambda^2 z_\Delta^2 z_{\Delta'}}{m^2} - 2\,(k - m^2)\, z_\Delta z_{\Delta'}^2 \right\}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] G. Zweig, CERN Report TH. 401 i TH. 412 (1964)
O.W. Greenberg, Phys. Rev. D *6*, 1101 (1972)

[2] R.P. Feynman, M. Kislinger i F. Raundal, Phys. Rev. D *3* 2706 (1971)

[3] R. Liper, Phys. Rev. D *5*, 2849 (1972)

[4] Y.S. Kim i E. Noz, Phys. Rev. D *8*, 3521 (1973)

[5] D. Dominici, J. Gomis i G. Longhi, Nuovo Cimento 48 B, 152 (1978)

[6] L. Bel, comunicació privada.

[7] E.C.G. Sudarshan i N. Mukunda, "Classical Dynamics: a Modern Perspective" (1974)

[8] D. Dominici, J. Gomis i G. Longhi, comunicació privada.

[9] L. Bel i J. Martin, Ann. Inst. Henri Poincaré, *22*, p. 173 (1975)

[10] L. Bel i X. Fustero, Ann. Inst. Henri Poincaré, *25*, p. 411 (1976)

[11] C. Godbillon, "Géométrie différentielle et mécanique analytique", Hermann (París, 1969)

[12] P. Droz-Vincent, Physica Scripta *2*, 129 (1970)

[13] L. Bel, A. Salas i J.M. Sánchez, Phys. Rev. D 7, 1099 (1973)

[14] C.W. Misner, K.S. Thorne i J.A. Wheeler, "Gravitation" p. 1093 (1970)

AGRAÏMENTS

Des d'ací voldríem donar gràcies al Professor L. Bel per haver-nos suggerit que tractéssim aquest tema. També al Dr. J. Gomis per les valuoses discussions tingudes amb ell durant l'elaboració d'aquest treball.